II. Continuité et limite d'une fonction composée

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble I et g une fonction définie sur ensemble J tel que $f(I) \subset J$.
La fonction notée $g \circ f$, définie sur I par $g \circ f(x) = g[f(x)]$, est appelée fonction composée de f et g.

Exemple :

$f(x) = 3x + 7$ et $g(y) = y^2$.
$g \circ f(x) =$ ……
…
$f \circ g(x) =$ ……
….
Remarque :……
…….

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $f(a)$.
Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Conséquence : La composée de deux fonctions continue est continue.

Activité 3 page 9.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions. Soit a, b *et* c finis ou infinis.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

Activités 4 et 5 page 10.

Exercice :

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$	↘	$-\infty$

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{1}{f(x)}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)+3}$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{f(x)+3}$.